ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 13 Ιανουαρίου 2024
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \Re$ ισχύει $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

Μονάδες 10

Α2. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα μόνο στοιχείο της στήλης Β, ώστε να προκύπτουν αληθείς προτάσεις, μεταφέροντας στο τετράδιό σας τον πίνακα Ι σωστά συμπληρωμένο.

Στήλη Α (Ανισότητα)	
1	$-2 \leq x < 3$
2	$-2 < x \leq 3$
3	$x \leq 3$
4	$x \geq -2$
5	$x < 3$

Στήλη Β (Συμβολισμός)	
Α	$x \in (-\infty, 3]$
Β	$x \in (-2, 3]$
Γ	$x \in [-2, 3)$
Δ	$x \in (-\infty, 3)$
Ε	$x \in [-2, +\infty)$

Πίνακας Ι				
1	2	3	4	5

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για κάθε $\alpha, \beta \in \Re$ ισχύει $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.

β. Ισχύει $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$.

γ. Για κάθε $\alpha \in \Re$ ισχύει $|\alpha| \leq -\alpha$.

δ. Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ είναι αδύνατη για $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$.

ε. Η εξίσωση $|x| = \alpha$ έχει λύσεις τις $x = \alpha$ ή $x = -\alpha$.

Μονάδες 10

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

Β1. $2|x-3|-4=0$

Μονάδες 5

Β2. $x^5 - 8x^2 = 0$.

Μονάδες 5

Β3. $\dfrac{x+2}{x} + \dfrac{4}{x-2} = -\dfrac{8}{x^2-2x}$.

Μονάδες 8

Β4. $(x-2)(x^2-2x)-(9-2x)(x-2)=0$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι παραστάσεις:

- $\text{K} = \dfrac{\sqrt{x^2 - 10x + 25}}{x-5} - \dfrac{\sqrt{x^2 + 6x + 9}}{x+3}$
- $\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2} + \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$

Γ1. Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός x ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Μονάδες 5

Γ2. i) Αν $-3 < x < 5$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης K.

Μονάδες 4

ii) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης β.

Μονάδες 4

Για $\text{K} = -2$ και $\beta = -6$.

Γ3. Να δείξετε ότι: $\dfrac{2 \cdot \beta \cdot x}{x^2 + \beta^2} \leq 1$ για κάθε $x \in \Re$.

Μονάδες 5

Γ4. Να δείξετε ότι: $\sqrt[4]{\dfrac{\left(\beta^{-2} \cdot \text{K}^{-2}\right)^3 \cdot \text{K}^4}{\left(\beta \cdot \text{K}^3\right)^{-2} : \left(\beta \cdot \text{K}\right)^4}} = 4$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda - 1)^2 \cdot x - 2x + \lambda = 2\lambda \cdot (1 - x) + 1$ (1) με $\lambda \in \Re$.

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παίρνει την μορφή $\left(\lambda^2 - 1\right)x = \lambda + 1$.

Μονάδες 5

Δ2. Να λύσετε την εξίσωση (1) για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ.

Μονάδες 8

Για $x_o = \dfrac{1}{\lambda - 1}$ η μοναδική λύση της εξίσωσης (1) και για $\lambda \in (2,5)$:

Δ3. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου ενός τετραγώνου πλευράς x_o.

Μονάδες 6

Δ4. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε να επαληθεύεται η εξίσωση $\left|x_o - \dfrac{1}{2}\right| + \left|x_o^2 - \dfrac{1}{4}\right| = 0$.

Μονάδες 6

ΤΑΞΗ: **Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ**

Ημερομηνία: Σάββατο 13 Ιανουαρίου 2024
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 63 σχολικού βιβλίου.

Α2.

Πίνακας Ι				
1	2	3	4	5
Γ	Β	Α	Ε	Δ

Α3. **α)** Λάθος

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. $2|x-3|-4=0 \Leftrightarrow 2|x-3|=4 \Leftrightarrow |x-3|=2 \Leftrightarrow x-3=2$ ή $x-3=-2 \Leftrightarrow$

$x=5$ ή $x=1$

Β2. $x^5-8x^2=0 \Leftrightarrow x^2\left(x^3-8\right)=0 \Leftrightarrow x^2=0$ ή $x^3-8=0 \Leftrightarrow$

$x=0$ ή $x^3=8 \Leftrightarrow$

$x=\sqrt[3]{8} \Leftrightarrow$

$x=2$

Β3. $\frac{x+2}{x}+\frac{4}{x-2}=-\frac{8}{x^2-2x}$

Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε x με

- $x \neq 0$ και
- $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ και
- $x^2-2x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x \neq 2$.

Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$\frac{x+2}{x}+\frac{4}{x-2}=-\frac{8}{x(x-2)}$ το ΕΚΠ$=x(x-2)$, άρα

$$x(x-2)\frac{x+2}{x}+x(x-2)\frac{4}{x-2}=-x(x-2)\frac{8}{x(x-2)} \Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x+2)+4x=-8 \Leftrightarrow x^2-4+4x+8=0 \Leftrightarrow x^2+4x+4=0 \Leftrightarrow$$

$(x+2)^2=0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$ Δεκτή.

Β4. <u>α' τρόπος:</u>

$$(x-2)(x^2-2x)-(9-2x)(x-2)=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)x(x-2)-(9-2x)(x-2)=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)\left[x(x-2)-(9-2x)\right]=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x^2-2x-9+2x)=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x^2-9)=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x-3)(x+3)=0 \Leftrightarrow$$

$x-2=0$ ή $x-3=0$ ή $x+3=0 \Leftrightarrow$

$x=2$ ή $x=3$ ή $x=-3$

<u>β’ τρόπος:</u>

$$(x-2)(x^2-2x)-(9-2x)(x-2)=0 \Leftrightarrow$$
$$(x^3-2x^2-2x^2+4x)-(9x-18-2x^2+4x)=0 \Leftrightarrow$$
$$x^3-2x^2-2x^2+4x-9x+18+2x^2-4x=0 \Leftrightarrow$$
$$x^3-2x^2-9x+18=0 \Leftrightarrow$$
$$x^2(x-2)-9(x-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-9)=0 \Leftrightarrow$$
$$(x-2)(x-3)(x+3)=0 \Leftrightarrow$$
$$x-2=0 \text{ ή } x-3=0 \text{ ή } x+3=0 \Leftrightarrow$$
$$x=2 \quad \text{ ή } x=3 \quad \text{ ή } x=-3$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Πρέπει:

- $x-5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 5$ και
- $x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$ και
- $x^2-10x+25 \geq 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 \geq 0$ Ισχύει για κάθε $x \in \Re$
- $x^2+6x+9 \geq 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 \geq 0$ Ισχύει για κάθε $x \in \Re$

Άρα η Κ ορίζεται για $x \neq 5$ και $x \neq -3$

Γ2. i) $K=\dfrac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5}-\dfrac{\sqrt{x^2+6x+9}}{x+3}=\dfrac{\sqrt{(x-5)^2}}{x-5}-\dfrac{\sqrt{(x+3)^2}}{x+3}=\dfrac{|x-5|}{x-5}-\dfrac{|x+3|}{x+3}$

- $-3<x<5 \overset{-5}{\Leftrightarrow} -8<x-5<0$ δηλαδή $x-5<0$ άρα το $|x-5|=-x+5$
- $-3<x<5 \overset{+3}{\Leftrightarrow} 0<x+3<8$ δηλαδή $x+3>0$ άρα το $|x+3|=x+3$

Οπότε $K=\dfrac{|x-5|}{x-5}-\dfrac{|x+3|}{x+3}=\dfrac{-x+5}{x-5}-\dfrac{x+3}{x+3}=-\dfrac{x-5}{x-5}-\dfrac{x+3}{x+3}=-1-1=-2$

ii) $\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}+\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} \Leftrightarrow$

$$\beta=\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2-2^2}+\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2-2^2}=\frac{3+2\sqrt{3}}{3-4}+\frac{3-2\sqrt{3}}{3-4}=\frac{3+2\sqrt{3}}{-1}+\frac{3-2\sqrt{3}}{-1}\Leftrightarrow$$

$$\beta=-\left(3+2\sqrt{3}\right)-\left(3-2\sqrt{3}\right)=-3-2\sqrt{3}-3+2\sqrt{3}=-6$$

Γ3. $\frac{2\cdot\beta\cdot x}{x^2+\beta^2}\le 1$. Πρέπει $x^2+\beta^2\ne 0\Leftrightarrow x^2+(-6)^2\ne 0\Leftrightarrow x^2+36\ne 0$ που ισχύει επειδή $x^2+36>0$. Επομένως $\frac{2\cdot\beta\cdot x}{x^2+\beta^2}\le 1\Leftrightarrow\frac{2\cdot(-6)\cdot x}{x^2+(-6)^2}\le 1\Leftrightarrow\frac{-12\cdot x}{x^2+36}\le 1\overset{\cdot(x^2+36)>0}{\Leftrightarrow}$

$(x^2+36)\cdot\frac{-12\cdot x}{x^2+36}\le 1\cdot(x^2+36)\Leftrightarrow -12\cdot x\le x^2+36\Leftrightarrow x^2+12\cdot x+36\ge 0\Leftrightarrow$

$(x+6)^2\ge 0$ που ισχύει για κάθε $x\in\Re$.

Γ4. <u>α΄ τρόπος:</u>

$$\sqrt[4]{\frac{\left(\beta^{-2}\cdot K^{-2}\right)^3\cdot K^4}{\left(\beta\cdot K^3\right)^{-2}:\left(\beta\cdot K\right)^4}}=\sqrt[4]{\frac{\beta^{-6}\cdot K^{-6}\cdot K^4}{\frac{\left(\beta\cdot K^3\right)^{-2}}{\left(\beta\cdot K\right)^4}}}=\sqrt[4]{\frac{\beta^{-6}\cdot K^{-6}\cdot K^4}{\frac{\beta^{-2}\cdot K^{-6}}{\beta^4\cdot K^4}}}=$$

$$=\sqrt[4]{\frac{\beta^{-6}\cdot K^{-6}\cdot K^4\cdot\beta^4\cdot K^4}{\beta^{-2}\cdot K^{-6}}}=\sqrt[4]{\beta^{-6}\cdot K^{-6}\cdot K^4\cdot\beta^4\cdot K^4\cdot\beta^2\cdot K^6}=$$

$$=\sqrt[4]{\beta^{-6+4+2}\cdot K^{-6+4+4+6}}=\sqrt[4]{\beta^0\cdot K^8}=\sqrt[4]{K^8}=\sqrt[4]{\left(K^2\right)^4}=\left|K^2\right|=K^2=(-2)^2=4$$

<u>β΄ τρόπος:</u>

$$\sqrt[4]{\frac{\left(\beta^{-2}\cdot K^{-2}\right)^3\cdot K^4}{\left(\beta\cdot K^3\right)^{-2}:\left(\beta\cdot K\right)^4}}=\sqrt[4]{\frac{\left((-6)^{-2}\cdot(-2)^{-2}\right)^3\cdot(-2)^4}{\left((-6)\cdot(-2)^3\right)^{-2}:\left((-6)\cdot(-2)\right)^4}}=\sqrt[4]{\frac{\left(12^{-2}\right)^3\cdot(-2)^4}{\left(-(-6)\cdot 2^3\right)^{-2}:12^4}}=$$

$$=\sqrt[4]{\frac{12^{-6}\cdot 2^4}{(6\cdot 8)^{-2}:12^4}}=\sqrt[4]{\frac{12^{-6}\cdot 2^4}{48^{-2}:12^4}}=\sqrt[4]{\frac{12^{-6}\cdot 2^4}{\frac{48^{-2}}{12^4}}}=\sqrt[4]{\frac{12^{-6}\cdot 2^4\cdot 12^4}{48^{-2}}}=$$

$$=\sqrt[4]{\frac{\left(2^2\cdot 3\right)^{-6}\cdot 2^4\cdot\left(2^2\cdot 3\right)^4}{\left(2^4\cdot 3\right)^{-2}}}=\sqrt[4]{\frac{2^{-12}\cdot 3^{-6}\cdot 2^4\cdot 2^8\cdot 3^4}{2^{-8}\cdot 3^{-2}}}=\sqrt[4]{2^{-12+4+8+8}\cdot 3^{-6+4+2}}=\sqrt[4]{2^8\cdot 3^0}=$$

$$=\sqrt[4]{2^8\cdot 1}=\sqrt[4]{2^8}=\sqrt[4]{\left(2^2\right)^4}=\left|2^2\right|=4$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε: $(\lambda-1)^2\cdot x-2x+\lambda=2\lambda\cdot(1-x)+1\Leftrightarrow$

$\left(\lambda^2-2\lambda+1\right)\cdot x-2x+\lambda=2\lambda-2\lambda x+1\Leftrightarrow$

$\lambda^2x-2\lambda x+x-2x+\lambda=2\lambda-2\lambda x+1\Leftrightarrow$

$\lambda^2x-x=\lambda+1\Leftrightarrow$

$\left(\lambda^2-1\right)\cdot x=\lambda+1$

Δ2. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\lambda^2-1\neq 0\Leftrightarrow(\lambda-1)(\lambda+1)\neq 0\Leftrightarrow\lambda-1\neq 0$ και $\lambda+1\neq 0\Leftrightarrow$
  $\lambda\neq 1$ και $\lambda\neq -1$
  τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την:
  $$x_o=\frac{\lambda+1}{\lambda^2-1}=\frac{\lambda+1}{(\lambda-1)(\lambda+1)}=\frac{1}{\lambda-1}$$
- Αν $\lambda=1$ η εξίσωση (1) γίνεται $0x=2$ και είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda=-1$ η εξίσωση (1) γίνεται $0x=0$ και είναι αόριστη.

Δ3. Η περίμετρος τετραγώνου πλευράς x_o είναι $\Pi=4\cdot x_o$

Άρα $\Pi=4\cdot x_o=4\cdot\dfrac{1}{\lambda-1}=\dfrac{4}{\lambda-1}$.

Έχουμε $\lambda\in(2,5)\Leftrightarrow 2<\lambda<5\overset{-1}{\Leftrightarrow}2-1<\lambda-1<5-1\Leftrightarrow 1<\lambda-1<4\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{4}<\frac{1}{\lambda-1}<\frac{1}{1}\overset{\cdot 4>0}{\Leftrightarrow}\frac{4}{4}<\frac{4}{\lambda-1}<\frac{4}{1}\Leftrightarrow 1<\frac{4}{\lambda-1}<4\Leftrightarrow 1<\Pi<4.$$

Δ4. <u>α’ τρόπος:</u>

$\left|x_o-\frac{1}{2}\right|+\left|x_o^2-\frac{1}{4}\right|=0$ ως άθροισμα μη αρνητικών ποσοτήτων θα πρέπει να ισχύει: $\left|x_o-\frac{1}{2}\right|=0$ και $\left|x_o^2-\frac{1}{4}\right|=0$ δηλαδή:

- $\left|x_o-\frac{1}{2}\right|=0 \Leftrightarrow x_o-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow x_o=\frac{1}{2}$
- $\left|x_o^2-\frac{1}{4}\right|=0 \Leftrightarrow x_o^2-\frac{1}{4}=0 \Leftrightarrow x_o^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_o=\pm\sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow x_o=\frac{1}{2}$ ή $x_o=-\frac{1}{2}$

Η κοινή τους λύση $x_o=\frac{1}{2}$ αποτελεί και λύση της εξίσωσης.

Επειδή έχουμε ότι $x_o=\frac{1}{\lambda-1}$, θα ισχύει: $\frac{1}{\lambda-1}=\frac{1}{2}\overset{\lambda\neq 1}{\Leftrightarrow}\lambda-1=2 \Leftrightarrow \lambda=3$ δεκτή.

<u>β’ τρόπος:</u>

$\left|x_o-\frac{1}{2}\right|+\left|x_o^2-\frac{1}{4}\right|=0 \Leftrightarrow \left|x_o-\frac{1}{2}\right|+\left|\left(x_o-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x_o+\frac{1}{2}\right)\right|=0 \Leftrightarrow$

$\left|x_o-\frac{1}{2}\right|+\left|x_o-\frac{1}{2}\right|\cdot\left|x_o+\frac{1}{2}\right|=0 \Leftrightarrow \left|x_o-\frac{1}{2}\right|\cdot\left(1+\left|x_o+\frac{1}{2}\right|\right)=0 \Leftrightarrow$

- $\left|x_o-\frac{1}{2}\right|=0 \Leftrightarrow x_o-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow x_o=\frac{1}{2}$ ή
- $1+\left|x_o+\frac{1}{4}\right|=0 \Leftrightarrow \left|x_o+\frac{1}{4}\right|=-1 \Leftrightarrow$ Αδύνατη γιατί το $\left|x_o+\frac{1}{4}\right|\geq 0$.

Έχουμε λύση την $x_o=\frac{1}{2}$, και αφού $x_o=\frac{1}{\lambda-1}$, θα ισχύει:

$\frac{1}{\lambda-1}=\frac{1}{2}\overset{\lambda\neq 1}{\Leftrightarrow}\lambda-1=2 \Leftrightarrow \lambda=3$ δεκτή.